الفصل السادس: العمل والطاقة

عندما نحل المعادلة الأساسية للتحريك $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ يمكننا أن نكامل دائما في حالة معرفة القوة بدلالة الزمن t ونحصل بذلك على: $\vec{I} = \vec{P} - \overrightarrow{P_0} = \int_0^t \vec{F}(t)\, dt$

في مسائل الفيزياء المشهورة لا نعرف عادة $\vec{F}(t)$ بدلالة الزمن t وإنما $\vec{F}(r)$ بدلالة الموقع $\vec{r}$ ولا يمكن حساب التكامل السابق إلا بمعرفة $\vec{r}(t)$ بدلالة الزمن t أي بمعرفة ما كنا نبحث عنه سابقا.

للخروج من هذه الدوامة، يمكن الاستعانة بطرق جديدة في طرح المشكلة تستعمل مفاهيم فيزيائية جديدة تسمى العمل والطاقة. هذه المفاهيم قد تسمح بحل مسائل معقدة بطريقة ابسط.

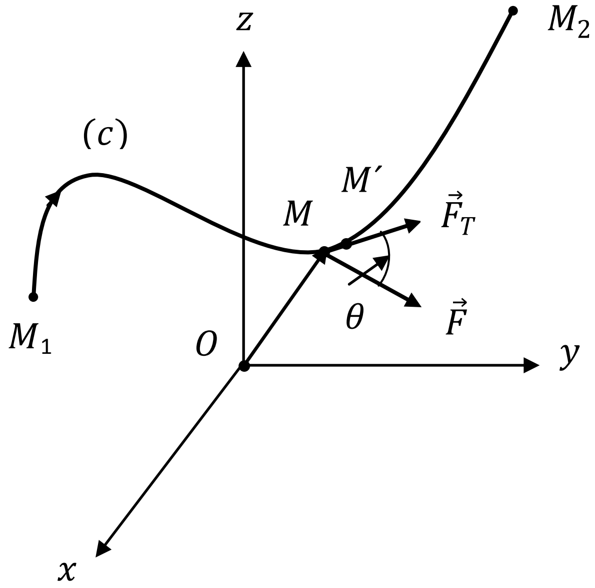
I- العمل والطاقة الحركية:

1- عمل قوة: نعتبر نقطة مادية موقعها محدد في المرجع (R) بالشعاع $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ وتتحرك على المسار (C) تحت تأثير القوة $\vec{F}$. أثناء الزمن العنصري dt تنتقل النقطة المادية من M إلى M' بالشعاع : $\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$.

نعرف العمل العنصري المبذول أو المنجز من طرف القوة $\vec{F}$ أثناء الزمن dt أو الانتقال $d\vec{r}$ بالمقدار:

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\vec{V}\, dt$$

حيث $\vec{V}$ هي سرعة النقطة المادية في M .



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dW = F\ cos\theta\ dr$$

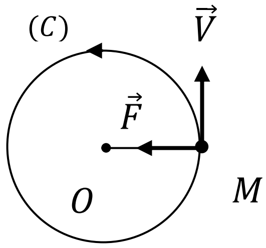
$$dW = F_T\ dr$$

$\vec{F}_T$ هي مركبة القوة $\vec{F}$

المماسية للمسار في النقطة M

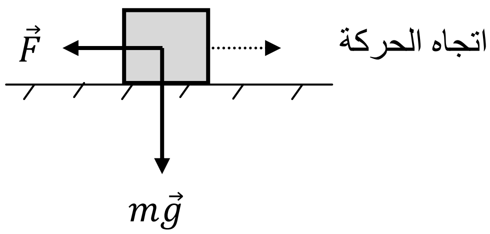
« العمل يساوي الانتقال في مركبة القوة التي لها نفس توجه الانتقال »

أمثلة:



- حركة دائرية تحت تأثير قوة مركزية شدتها ثابتة

- القوة $\vec{F}$ لا تنتج عملا لأنها عمودية على المسار.



- قوة الثقل $m\vec{g}$ لا تعمل لأنها عمودية على اتجاه الحركة

- عمل $\vec{F}$ سالب لأنها في الاتجاه المعاكس للحركة

للحصول على العمل الناتج عن القوة $\vec{F}$ عند الانتقال على المسار (C) بين M_1 و M_2 ، نكامل عبارة dW ونكتب:

$$\boldsymbol{W_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1,(c)}^{M_2} \vec{F}.d\vec{r}}$$

يجب حساب التكامل على المسار (C) ، أي على المنحنى الذي ترسمه النقطة المتحركة M بين M_1 و M_2 . لا بد أن نشير هنا إلى أن العمل $W_{M_2}^{M_1}$ يتعلق مبدئيا بالمسلك الذي تتبعه النقطة M ، غير أنه بالنسبة لصنف معين من القوى (تسمى القوى المحافظة) فإن العمل لا يتعلق بالمسلك.

2- القدرة أو الاستطاعة: نسمي قدرة القوة $\vec{F}$ وفقا للشروط السابقة ، المقدار :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{V}\,dt}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

أو:

$$P = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

القدرة المتوسطة هي: $P_{moy} = \frac{W}{\Delta t}$

القدرة هي إذن العمل المبذول أثناء الزمن dt والقدرة المتوسطة أثناء الزمن Δt .

الوحدات: $[W] = [J] = Kg\ m^2\ s^{-2}$

$$[P] = [W = Watt] = Kg\ m^2\ s^{-3} = J\ s^{-1}$$

3- الطاقة الحركية، نظرية الطاقة الحركية:

عند اعتبار المرجع (R) غاليلي، القانون الأساسي للتحريك يكتب: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\,\frac{d\vec{V}}{dt}$

عبارة عمل القوة $\vec{F}$ تكتب :

$$dW = \vec{F}.\vec{V}\,dt = m\,\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}\,dt = m\,\vec{V}.d\vec{V} = m\ V\,dV$$

أو: $$dW = d\left(\frac{1}{2}\ m\, V^2\right) = dE_c$$

نعرف المقدار $\frac{1}{2}.m.V^2$ بالطاقة الحركية E_c ، ونستنتج من العلاقة الاخيرة أن :

$$W = \Delta E_c = E_c(t_f) - E_c(t_i)$$

العلاقة الأخيرة تمثل ما يعرف **بنظرية الطاقة الحركية** التي تنص على ما يلي:

« عمل القوة الكلية المطبقة على نقطة مادية بين اللحظتين t_i الابتدائية و t_f النهائية يساوي التغير في مقدار الطاقة الحركية بين هاتين اللحظتين ».

II- القوة المحافظة، الطاقة الكامنة:

1 - **الحقل السلمي، الحقل الشعاعي:** من وجهة نظر علم الرياضيات، الحقل هو عبارة عن دالة تمثل مقدارا فيزيائيا في كل نقطة من الفضاء. في حالة الحقل السلمي يكون هذا المقدار محددا بإعطاء قيمة واحدة لكل نقطة. في الحالة التي تتطلب معرفة اتجاه المقدار الفيزيائي زيادة على قيمته في كل نقطة من الفضاء (شدته)، فإن هذا المقدار يمثل بحقل شعاعي مثل:

$$\vec{F} = F_x\ \vec{i} + F_y\ \vec{j} + F_z\ \vec{k}$$

2 - **تدرج دالة سلمية:** ليكن الحقل السلمي $\varphi(x, y, z)$ بدلالة الإحداثيات الديكارتية (x, y, z) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نسمي تدرج الدالة $\varphi(x, y, z)$ الشعاع :

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ \vec{k}$$

حيث $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ تسمى المشتقة الجزئية للدالة $\varphi(x,y,z)$ بالنسبة للمتغيرة x ونحصل عليها باشتقاق $\varphi(x,y,z)$ بالنسبة لـلمتغيرة x عند اعتبار المتغيرتين y و z ثابتتين، وكذلك نفس الشيء بالنسبة للمشتقتين الجزئيتين $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

نعتبر الآن انتقالا عنصريا $\overrightarrow{MM'}$ للنقطة M في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{\imath} + dy.\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$$

الجداء السلمي: $\overrightarrow{grad}\varphi.d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\ dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\ dz$

الطرف الثاني في المساواة السابقة يعرف بالتفاضل التام $d\varphi$ للدالة φ ، أي:

$$\boldsymbol{d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\ dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\ dz}$$

ونحصل بذلك على واحدة من أهم خواص التدرج والتي تكتب: $\boldsymbol{d\varphi = \overrightarrow{grad}\varphi.d\overrightarrow{OM}}$.

3 - **الطاقة الكامنة:** نقول أن حقل قوة $\vec{F}(x,y,z)$ مشتق من كمون عندما توجد دالة سلمية $E_p(x,y,z)$ بحيث : $\boldsymbol{\vec{F}(x,y,z) = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z)}$ والتي نكتبها عادة بشكل أبسط:

$$\boldsymbol{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$$

الدالة السلمية $E_p(x,y,z)$ تسمى كمون الحقل $\vec{F}(x,y,z)$ أو الطاقة الكامنة للنقطة $M(x,y,z)$ الموجودة داخل الحقل $\vec{F}(x,y,z)$ (نقول عادة الطاقة الكامنة لحقل القوة). نشير أنه في الحالة العامة، يمكن أيضا أن تكون E_p دالة للزمن t ، غير أننا هنا لا نهتم إلا بالحقول التي لا تتعلق بالزمن والطاقة الكامنة هي إذن دالة للإحداثيات فقط.

4 - **الحقل المحافظ:** حقل القوة المشتق من كمون لا يتعلق بالزمن هو حقل محافظ:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

5 - **خواص الحقل المحافظ:** ليكن حقل القوة $\vec{F}(x, y, z)$ المعرف في جملة ا لإحداثيات الديكارتية

بالمركبات: $F_x(x, y, z)$ ، $F_y(x, y, z)$ ، $F_z(x, y, z)$ ، أي: $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$

إذا كان هذا الحقل مشتق من كمون E_p ، فإنه لدينا:

$$\vec{F}.d\overrightarrow{OM} = F_x\ \ dx + F_y\ dy + F_z\ \ dz = -\overrightarrow{grad}E_p.d\overrightarrow{OM} = -dE_p$$

ويكون هذا ممكن فقط لما الطرف $F_x\ dx + F_y\ \ dy + F_z\ dz$ في العلاقة السابقة يمثل

تفاضلا تاما. الشروط اللازمة لكي يكون تفاضلا تاما (القوة $\vec{F}$ محافظة) هي:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad ، \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad ، \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

6 - **عمل قوة محافظة:** العمل المتحصل عليه عند نقل نقطة مادية M توجد تحت تأثير قوة محافظة

$\vec{F}$ من الموقع $M_1(x_1, y_1, z_1)$ إلى الموقع $M_2(x_2, y_2, z_2)$ هو:

$$W_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

أو: $$\boldsymbol{W_{M_1}^{M_2}} = \boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}) - \boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$$

وهذا يعطينا النتيجة المهمة التالية :

« عمل قوة محافظة لا يتعلق بالمسار وإنما يتعلق فقط بالنقطتين الحديتين الابتدائية والنهائية أو نقطتي الانطلاق والوصول. هذا العمل يساوي الفرق في الطاقة الكامنة بين النقطتين »

<u>نتيجة</u>: عندما يكون المسار مغلق، فإن العمل $\vec{F}$ يكون معدوما: $W = \oint \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = 0$.

<u>أمثلة</u>: - **قوة الجاذبية للأرض:** في المعلم $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ وعند اعتبار المحور الشاقولي $\overrightarrow{Oz}$

موجه نحو الأعلى، هذه القوة تكتب:

$\vec{F} = m\ \vec{g} = -m\ g\ \vec{k}$ ، أي: $F_x = 0$ ، $F_y = 0$ ، $F_z = -m.g$. عند تطبيق الشروط السابقة على هذه القوة يمكن التأكد بسهولة أنها محافظة. ولدينا إذن :

$$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -m\ g\ dz = -dE_p$$

وعندما نكامل نحصل على: $E_p(z) = m\ g\ z + C$. الطاقة الكامنة تكتب دائما بدلالة ثابت يحدد باختيار مبدأ لها. في هذه الحالة ، نأخذ عادة مبدأ الطاقة الكامنة على سطح الأرض، أي: $E_p = 0$ لما $z = 0$ مما يؤدي إلى: $\boldsymbol{E_p(z) = m\ g\ z}$.

- **قوة المرونة لنابض:** عند تمدد أو تقلص طول نابض مرن فإنه يؤثر بقوة معاكسة تعمل على إرجاعه إلى حالة التوازن. عند اختيار المحور $\overrightarrow{Ox}$ مطابق لاتجاه التغير في طول النابض x ، فإن قوة المرونة للنابض تكتب : $\vec{F} = -K\ x\ \vec{\imath}$ أو $F_x = -K\ x$. يمكن أن نتأكد أيضا أن القوة $\vec{F}$ محافظة ونكتب:

$$E_p(x) = -\int F_x\, dx = \int K\ x\ \ dx = \frac{1}{2}\ K\ x^2 + C$$

ونختار، هنا أيضا، مبدأ الطاقة الكامنة بحيث: $E_p(0) = 0$ ونحصل على:

$$\boldsymbol{E_p(x) = \frac{1}{2}\ K\ x^2}$$

III- الطاقة الميكانيكية (الكلية):

نظرية الطاقة الحركية في شكلها التفاضلي $dW = dE_c$ هي عمليا، ليست ذات فائدة معتبرة، لأن الحصول على عمل محصلة القوى التي تؤثر على النقطة المادية عن طريق التكامل ليس دائما سهلا.

ولكن، عندما يكون حقل القوة العاملة مشتق من كمون، فإن تكامل الطاقة الحركية يكون بسيطا. فعندما

تكون: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ ، فإنه يستلزم أن : $dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p$ ، ومن العلاقة التفاضلية لنظرية الطاقة الحركية نستنتج أن: $dE_c = -dE_p$ أو: $d(E_c + E_p) = 0$. ونكتب إذن:

$$\boldsymbol{E_p + E_c = Cte} \quad (\text{مقدار ثابت})$$

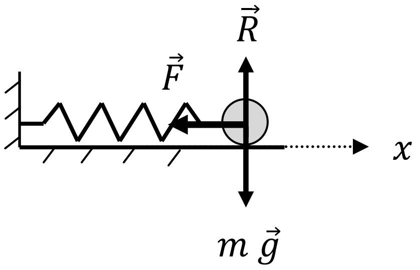
المقدار $E = E_c + E_p$ ، الذي هو عبارة عن مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة ، يسمى **"الطاقة الميكانيكية"** أو **"الطاقة الكلية"**. هذا المقدار يبقى ثابت أثناء حركة النقطة المادية ويعطي النتيجة المهمة التالية:

« عندما تنتقل نقطة مادية تحت تأثير حقل قوى مشتق من كمون E_p مستقل عن الزمن، فإن الطاقة الميكانيكية $E = E_c + E_p$ تبقى ثابتة أثناء الحركة ». هذا القانون يعرف **بقانون حفظ الطاقة.**

عندما تكون الطاقة الميكانيكية محفوظة، فإن الطاقة الكامنة تتحول أثناء الحركة إلى طاقة حركية أو العكس بحيث يبقى مجموع الشكلين من الطاقة ثابت.

يجب أن ننبه هنا إلى أن هذه النتيجة لا تكون صحيحة عندما تكون النقطة المادية تتعرض إلى قوى غير مشتقة من كمون مثل قوة الاحتكاك. فعند وجود قوى محافظة وغير محافظة تؤثر معا على النقطة المادية فإنه يمكن أن نكتب: $dW_c + dW_{nc} = dE_c$ حيث W_c يمثل عمل القوى المحافظة (*conservatives*) و W_{nc} عمل القوى غير المحافظة (*non conservatives*). العلاقة السابقة تكتب: $dW_{nc} = dE_c - dW_c$ ، وعندما نعوض عمل القوى المحافظة ب طاقتها الكامنة فإننا نحصل على: $dW_{nc} = dE_c + dE_p = dE$. وهذه العلاقة تؤدي بدورها إلى القانون: $\boldsymbol{W_{nc} = \Delta E}$ الذي يعني ما يلي: **« عمل القوى غير المحافظة يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية (الكلية) ».**

IV- دراسة الحركة الخطية الناتجة عن قوة مشتقة من كمون:



$$F = -K\,x \;\; , \;\; E_p = \frac{1}{2}\,K\,x^2$$

الحركة الخطية هي كل حركة تتعلق ببعد واحد فقط.

في حالة الحركة الخطية العامة، الطاقة الكامنة لا تتعلق إلا بإحداثية واحدة والتي نأخذها هنا x . كون الطاقة الكلية E تبقى محفوظة يعطينا: $E_c + E_p = E$ ، أو: $\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + E_p = E$ ، حيث E تبقى ثابتة. من العلاقة الأخيرة نستنتج أن: $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right] \geq 0$ ، وهذا يعني أن الحركة تكون ممكنة فقط لما تكون: $E \geq E_p(x)$. إذن، حركة النقطة المادية تبقى محصورة فقط في المنطقة التي تكون الطاقة المكانيكية (الكلية) أكبر من الطاقة الكامنة. العلاقة السابقة تكتب:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}$$

أي:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}} = \int_0^t dt = t$$

وهكذا نحصل على العلاقة بين x و t ونحل مشكلة الحركة الخطية للنقطة المادية.

1- حالات التوازن: للتبسيط، نأخذ حالة نقطية مادية قابلة للانتقال على محور واحد $\overrightarrow{Ox}$ تحت تأثير قوة مشتقة من كمون يتعلق بالإحداثية x فقط. القوة $\vec{F}$ مشتقة من الكمون $E_p(x)$ تستلزم أن:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x)$$

أي: $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ و $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$ و $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$.

كل نقطة من المحور $\overrightarrow{Ox}$ تكون فيها $F_x = 0$ تمثل حالة توازن. وبما أن $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{dE_p}{dx}$

فإن حالة (حالات) التوازن نحصل عليها لما $\frac{dE_p(x)}{dx} = 0$ ، أي عندما تكون دالة الطاقة الكامنة حدية.

لما تكون نقطة x_0 تمثل حالة توازن، يمكن أن نكتب عبارة F_x باستعمال النشر المحدود:

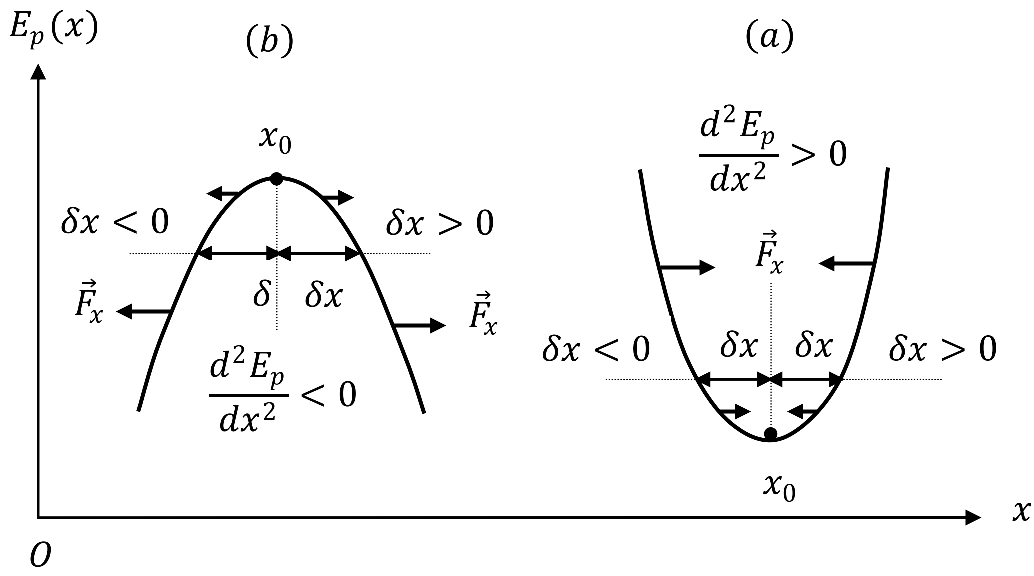
$$\mathrm{E_p}(x) = E_p(x_0) + \frac{dE_p}{dx}\,(x - x_0) + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2E_p}{dx^2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

من الشكل:

$$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -\frac{d^2E_p}{dx^2}\,(x - x_0) - \frac{dE_P}{dx} - \cdots$$

لما نتوقف عند الحد الثاني من النشر. وبما أن $\frac{dE_P}{dx} = 0$ ، نحصل على:

$$F_x == -\frac{d^2E_p}{dx^2}\,(x - x_0) == -\frac{d^2E_p}{dx^2}\,\delta x$$



تعيين حالات التوازن لنقطة مادية توجد في منطقة تأثير الكمون $E_p(x)$ يتطلب التمييز بين حالتين:

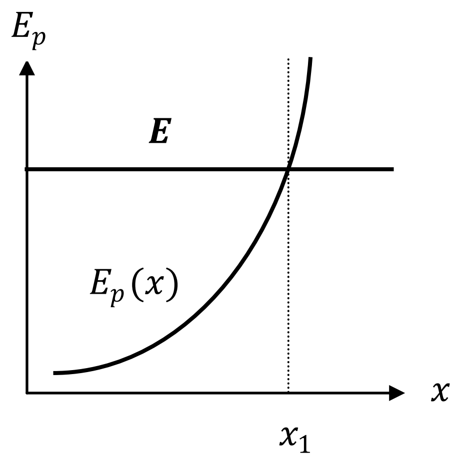
- **الحالة لما** $\boldsymbol{\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0}$: ممثلة بالحالة (a) في الشكل السابق، ونحصل عليها عندما يكون انحناء الدالة $E_p(x)$ موجه نحو الأعلى. في هذه الحالة، لما نزيح النقطة المادية عن مكان توازنها x_0 بالمسافة $\delta x = x - x_0$ ، فإن اتجاه القوة $\vec{F_x}$ يعمل دائما إرجاع النقطة المادية إلى x_0 سواء كانت $\delta x > 0$ أو $0 > \delta x$. التوازن في هذه الحالة هو إذن **"توازن مستقر"**

- **الحالة لما** $\boldsymbol{\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0}$: ممثلة بالحالة (b) ، ونحصل عليها لما $E_p(x_0)$ هي قيمة أعظمية للدالة $E_p(x)$ ويكون انحناءها موجه نحو الأسفل. في هذه الحالة، يمكن أن نتأكد أن اتجاه القوة $\vec{F_x}$ يعمل دائما على عدم رجوع النقطة المادية إلى موقع توازنها x_0 بعد إزاحتها عنه سواء نحو اليمين أو نحو اليسار. موقع التوازن في هذه الحالة يمثل **"توازن غير مستقر"**.

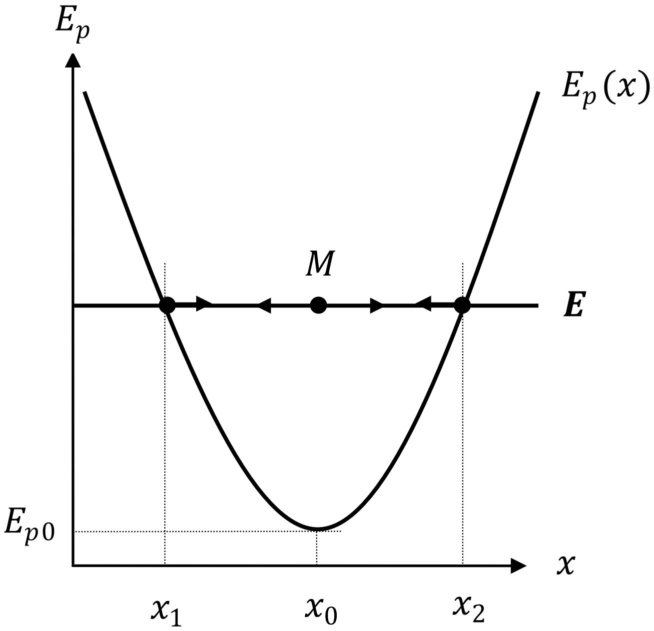
- **<u>خلاصة:</u>** عندما تشكل نقطة $\boldsymbol{x = x_0}$ موقع **توازن**، فإن الطاقة الكامنة $E_p(x)$ تكون **حدية** في هذه النقطة ، أي: $\boldsymbol{\frac{dE_p(x)}{dx} = 0}$ لما $x = x_0$. يكون التوازن **مستقرا** عندما تكون $E_p(x_0)$ قيمة **أصغرية**، أي: $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$. يكون التوازن **غير مستقر** عندما تكون $E_p(x_0)$ قيمة **أعظمية**، أي: $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$. لما تكون $\frac{d^2E_p}{dx^2} = 0$ يجب أن ننظر في الحد التالي للنشر.

2-منحنيات الطاقة الكامنة:

- **حاجز الكمون:** منحنى الطاقة الكامنة في الشكل المقابل يمثل **"حاجز كمون"**. في هذه الحالة،



النقطة المتحركة توجد فقط في المنطقة $[x < x_1]$ **وانتقالها إلى المنطقة** $[x > x_1]$ غير ممكن لأن الطاقة الكامنة E_p في هذه المنطقة أعلى من الطاقة الكلية E .



- **بئر الكمون:** شكل المنحنى $E_p(x)$ المقابل يسمى **"بئر كمون"**. الجسيمة M التي تملك الطاقة الكلية E لا تستطيع الحركة إلا في المجال $[x_1, x_2]$. تكون سرعها قصوى لما $x = x_0$ وتنعدم لما تصير $x = x_1$ أو $x = x_2$. لما يكون مستوى الطاقة الكلية $E = E_{p0}$ ، الطاقة الحركية E_C تكون معدومة وتبقى الجسيمة في حالة توازن (من دون حركة) عند النقطة $x = x_0$ التي توافق القيمة الأصغرية للطاقة الكامنة.

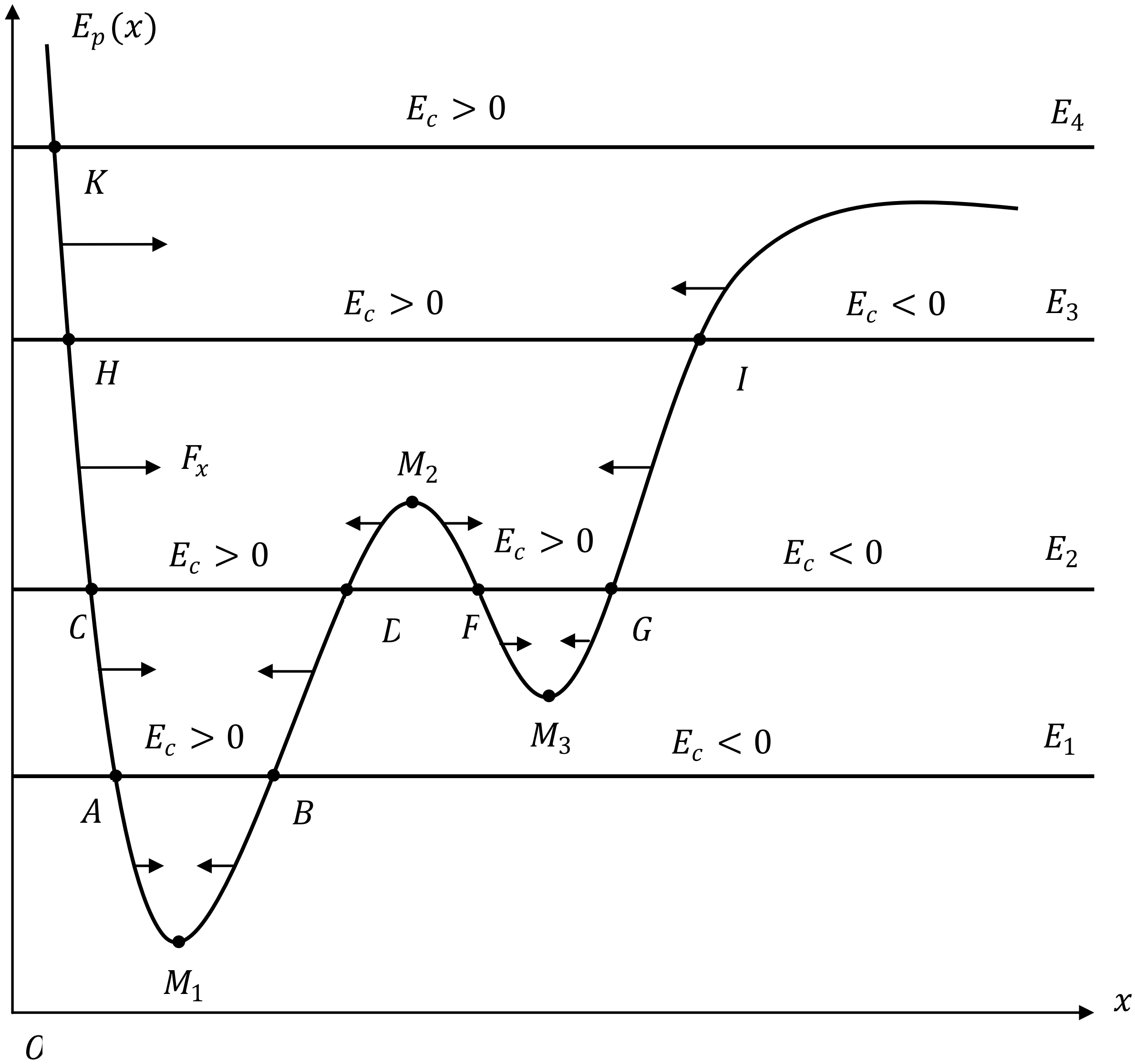
- **مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة:** المنحنيات $E_p(x)$ التي تمثل الطاقة الكامنة بدلالة x في الحركات الخطية التي تتطلب دراستها بعد واحد، أو $E_p(r)$ بدلالة r في حالة القوى المركزية، هي ذات أهمية كبيرة في فهم حركة جسيمة توجد داخل هذا الكمون ومن دون حل معادلة الحركة.

سوف نرى كيف نناقش ذلك باستعمال شكل منحنى الطاقة الكامنة $E_p(x)$ الآتي (أنظر الشكل).

من الملاحظة المباشرة للمنحنى، نستخلص النتائج التالية:

- **نقاط التوازن:** وهي المواقع التي تكون فيها الجسيمة في حالة سكون. هذه النقاط هي: M_1 و M_2 و M_3 . في M_1 و M_3 التوازن مستقر وفي M_2 غير مستقر.

- القوة التي تؤثر على الجسيمة هي: $\vec{F}_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}\,\vec{i}$ ، وهذا يعني أن اتجاه $\vec{F}_x$ محدد بميل منحنى الطاقة الكامنة. فعندما تكون $\frac{dE_p}{dx} > 0$ (ميل المماس للمنحنى موجب أي الدالة $E_p(x)$ متزايدة) فإن $\vec{F}_x$ سالبة (في الاتجاه السالب للمحور $\overrightarrow{Ox}$) والعكس عندما تكون $\frac{dE_p}{dx} < 0$.



$E_c = E - E_p$ حيث $\{E = E_1\,, E_2\,, E_3\,, E_4\}$

- **مستويات الطاقة الكلية E :** كون الجسيمة تحت تأثير قوة مشتقة من كمون، يعني أن العلاقة $E = E_c + E_p$ دائما متحققة والمقدار $E - E_p = E_c$ موجب لأن $E_c \geq 0$. ونستنتج أنه

لا يمكن للجسيمة أن تتواجد في كل مكان على $\overrightarrow{Ox}$ وإنما فقط حيث $E \geq E_P$. نناقش هنا أربع مستويات للطاقة الكلية المبينة على الشكل بالقيم $\{E = E_1 , E_2 , E_3 , E_4\}$.

- **المستوى $E = E_1$:** يمكن للجسيمة أن توجد فقط بين النقطتين A و B على القطعة AB . فعندما تأتي من جهة A ، تعود لما تصل إلى B ثم تعود لما تصل إلى A وتبقى تهتز بين النقطتين. ولهذا تسمى A و B نقاط العودة.

- **المستوى $E = E_2$:** يمكن للجسيمة أن توجد فقط في منطقتين على CD أو FG . المرور بين المنطقتين متعذر لوجود حاجز كمون بينهما.

- **المستوى $E = E_3$:** نحصل على حركة اهتزازية للجسيمة بين H و I فقط.

- **المستوى $E = E_4$:** حركة الجسيمة تصير غير اهتزازية وتنتقل بين K و ∞ . فإذا أتت من جهة اليسار (من ∞) فإنها تصل إلى K ثم تعود إلى ∞ أي لا ترجع أبدا.

<u>**تطبيق:**</u> التمرين 3 من الأعمال الموجهة. لدينا: $\vec{F} = -2xy\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath}$.

1-ا- العمل على المسار (OAC): $W_O^C = \int_O^C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_O^A \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_A^C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$

على القطعة OA ، $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath}$ و $y = 0$ وهذا يستلزم أن: $\int_O^A \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$.

على القطعة AC ، $\overrightarrow{dl} = dy\vec{\jmath}$ و $x = 2$ وهذا يستلزم أن: $\int_A^C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^4 -4\,\mathrm{dy} = -16\,\mathrm{J}$

$$W_O^C(OAC) = -16\,J \quad \text{:إذن}$$

1-ب- العمل على المسار (OBC): : $W_O^C = \int_O^C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_O^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_B^C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$

على القطعة OB ، $\overrightarrow{dl} = dy\vec{\jmath}$ و $x = 0$ وهذا يستلزم أن: $\int_O^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$.

على القطعة BC ، $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath}$ و $y = 4$ وهذا يستلزم أن:

$$\int_B^C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_0^2 -8\,x\,dx = -[4\,x^2]_0^2 = -16\,J$$

إذن: $W_O^C(OBC) = -16\,J$

1- ج- العمل على المنحنى $(\mathcal{C})$ للقطع المكافئ:

$$W_O^C(\mathcal{C}) = \int_{O,(\mathcal{C})}^C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{0,(\mathcal{C})}^C (-2xy\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath})\cdot(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath})$$

$$= \int_{0,(\mathcal{C})}^C -2xy\ dx + \int_{0,(\mathcal{C})}^C -x^2\ dy$$

على المنحنى $(\mathcal{C})$ ، لدينا: $y = x^2$ و $dy = 2\,x\,dx$ ، ولما نعوض في المعادلة السابقة نجد:

$$W_O^C(\mathcal{C}) = \int_{0,(\mathcal{C})}^C -4\,x^3\ dx = \int_0^2 -4\,x^3\,dx = -4\,\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = -16\,J$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة y ونحصل على:

$$W_O^C(\mathcal{C}) = \int_{0,(\mathcal{C})}^C -2\,y\ dy = \int_0^4 -2\,y\ dy = -[y^2]_0^4 = -16\,J$$

ونلاحظ أن العمل المنجز هو نفسه عند الانتقال على المسارات الثلاثة المختلفة. وهذا يعود لكون القوة $\vec{F}$ محافظة، لأن: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -2\,x$.

2- عبارة الطاقة الكامنة $E_p(x,y,z)$: عبارة الطاقة الكامنة هي في الحقيقة دالة للمتغيرتين x و y فقط لأن القوة $\vec{F}$ توجد في المستوي $(\overrightarrow{Ox}\,,\overrightarrow{Oy})$ فقط، ولكن فضلنا أن نكتبها في الشكل السابق لنرى

كيف نبرهن أنها لا يمكن أن تتعلق بالمتغيرة z . بما أن القوة $\vec{F}$ محافظة فإنه يمكن أن نكتب:

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ ، أي: $-2xy\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$ ، وهذا يعني أن:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} = 2\,x\,y \quad (1) \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} = x^2 \qquad (2) \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

المعادلة (3) تعني أن الطاقة الكامنة E_P لا تتعلق ب z وتكتب من الشكل $E_p(x,y)$ فقط. المعادلة (1) تعني أن E_P تكتب من الشكل: $(1')\quad E_p(x,y) = x^2\,y + g(y) + C$ ، والمعادلة (2) تعني أن E_P تكتب من الشكل: $(2')\quad E_p(x,y) = x^2\,y + h(x) + C$. الشكلان $(1')$ و $(2')$ للدالة $E_p(x,y)$ يجب أن يكونا متطابقين وهذا ممكن فقط لما: $g(y) = h(x) = 0$. ونستنتج أن: $E_p(x,y) = x^2\,y + C$. وجود مبدأ الطاقة الكامنة في O يعني أن: $E_p(0,0) = 0$ أي الثابت: $C = 0$ ونحصل في النهاية على: $E_p(x,y) = x^2\,y$.

3- عمل القوة $\vec{F}$ بين O و C لا يتعلق بالمسار وإنما فقط بنقطة الانطلاق ونقطة الوصول ويكتب بدلالة الطاقة الكامنة كما يلي: $W_O^C = E_p(O) - E_P(C) = E_p(0,0) - E_p(2,4) = -16\,J$

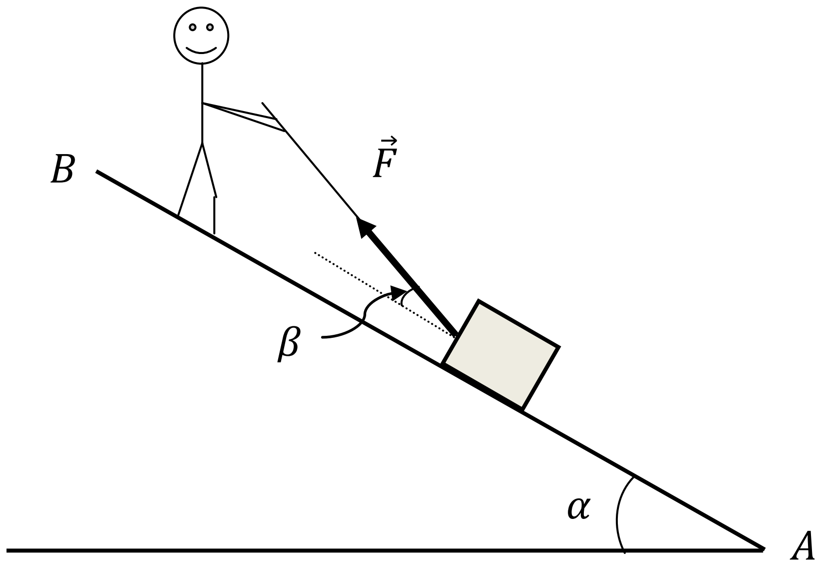
ونحصل على نفس النتائج السابقة.

أعمال موجهة

1 - **التمرين 1:** يسحب رجل صندوقا كتلته $m = 50\ Kg$ على سطح مائل بزاوية $\alpha = 30°$
وطوله $AB = L = 10\ m$ باستعمال قوة $\vec{F}$ تصنع مع المستوى المائل زاوية $\beta = 10°$.
حركة الصندوق تتم باحتكاك معامله $f = 0.2$.

أ - اوجد القيمة الحدية لشدة القوة $\vec{F}$ التي يجب بذلها من طرف الرجل.

ب - عندما تكون شدة $\vec{F}$ تساوي $700\ N$ ، ما هو العمل الذي قدمه الرجل.



التمرين 2: في المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ، توجد القوة $\vec{F} = K(x+y)\vec{i} + K(x-y)\vec{j}$ حيث K ثابت.

1 - أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عند الانتقال على المحور $\overrightarrow{Ox}$ من النقطة $A(R, 0)$ إلى النقطة $B(-R, 0)$.

2 - أحسب العمل السابق عند الانتقال من A إلى B على نصف الدائرة المعرفة بالمركز O ونصف القطر R والواقعة في الجهة الموجبة للمحور $\overrightarrow{Oy}$ $(y > 0)$.

3 - بين أن القوة $\vec{F}$ محافظة.

4 - من بين الدوال التالية أيهن يمكن أن تمثل عبارة الطاقة الكامنة للقوة $\vec{F}$:

أ - $-K\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\vec{i} - K\left(-\frac{y^2}{2} + xy\right)\vec{j}$

ب - $-K\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+2xy\right)+C_0$

ت - $-K\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+xy\right)+C_0$

5 - أعد حساب عمل القوة $\vec{F}$ بين A و B باستعمال عبارة الطاقة الكامنة المناسبة.

التمرين 3: في المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ، نعتبر حقل القوة $\vec{F}=-2xy\vec{\imath}-x^2\vec{\jmath}$ والنقاط $A(2,0)$ ، $B(0,4)$ ، $C(2,4)$.

1 - أحسب العمل لنقل نقطة مادية في هذا الحقل من المبدأ O إلى النقطة C على المسارات التالية:

ا- على القطعة المستقيمة OA ثم القطعة المستقيمة AC . ب- على القطعة المستقيمة OB ثم القطعة المستقيمة BC . ج- على القطع المكافئ $y=x^2$. ماذا تلاحظ ؟ بين أن حقل القوة $\vec{F}$ محافظ.

2 - أوجد عبارة الطاقة الكامنة للحقل $\vec{F}$ عند اعتبار مبدأ الطاقة الكامنة في النقطة O .

3 - أعد حساب عمل القوة $\vec{F}$ بين النقطتين O و C باستعمال الطاقة الكامنة.

التمرين 4: تترك نقطة مادية كتلتها m عند النقطة A من المسار الشاقولي المبين على الشكل. الحركة تتم من دون احتكاك. النقطة A توجد على ارتفاع h من B . الجزء AB هو نصف قطع مكافئ والجزء BC ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها R . الجزءان لهما نفس المماس في B .

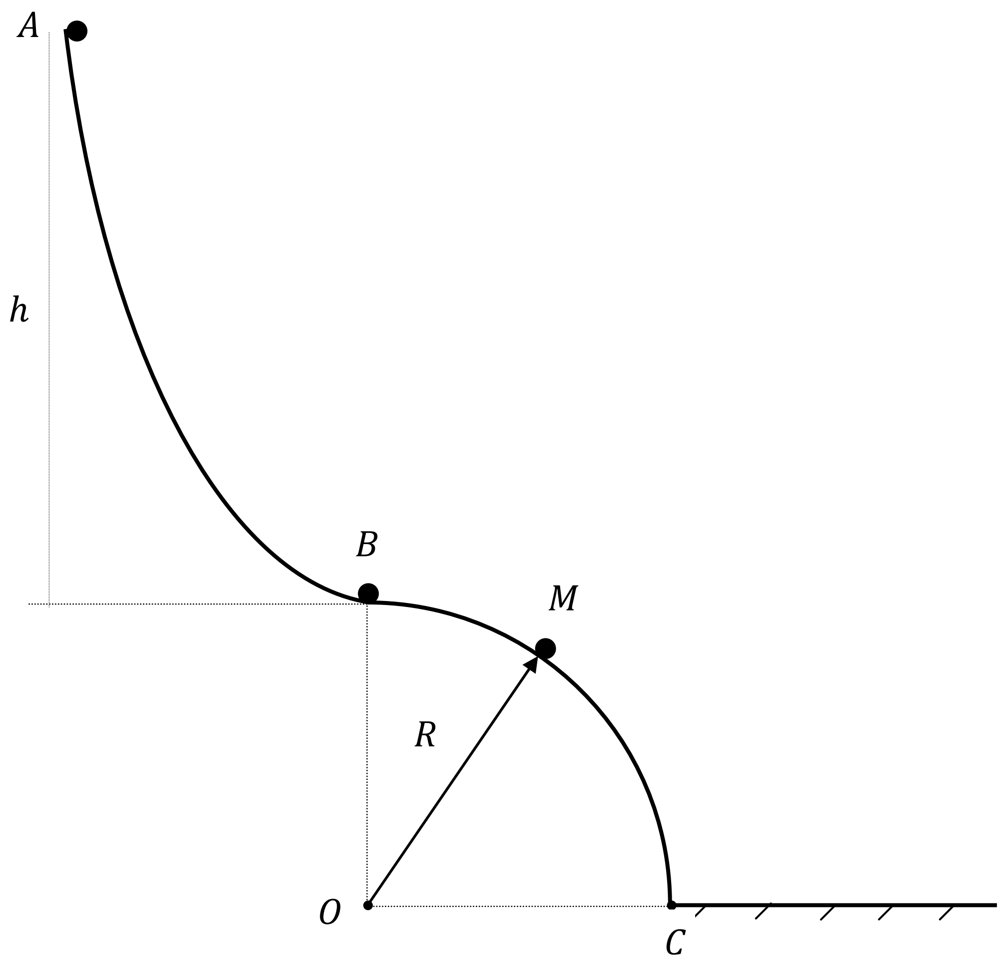
1- بين أن الطاقة الميكانيكية تبقى محفوظة على كل المسار ثم استنتج سرعة النقطة المادية في B .

2- أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية في نقطة كيفية M من المسار BC .

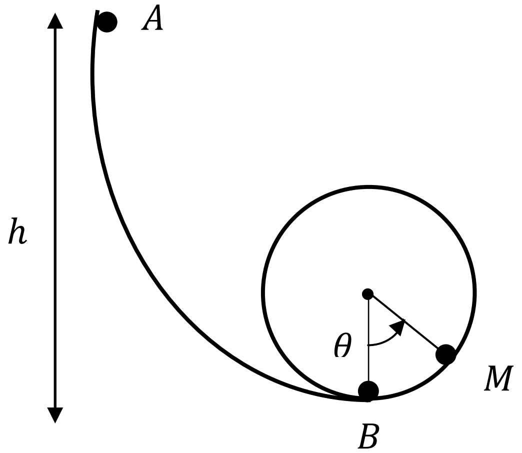
3- أوجد سرعتها V_M في M .

4- استنتج قوة رد الفعل N التي يؤثر بها المسار على النقطة المادية في M ثم ناقش إمكانية مغادرة النقطة المادية للمسار بين B و C .

5- ما هي أصغر قيمة للارتفاع h بدلالة R تجعل النقطة المادية تغادر المسار في B ، في هذه الحالة حدد موقع سقوطها بعد النقطة C وأرسم مسارها بالنسبة إلى المسار الدائري BC .



التمرين 5: تترك كرية كتلتها m من دون سرعة ابتدائية عند نقطة A توجد على ارتفاع h من سكة موجهة وضعيتها شاقولية وتنتهي بمسار دائري نصف قطره a . حركة الكرية تتم من دون احتكاك.



1 - احسب السرعة V_B عند النقطة B ثم في نقطة كيفية M من الجزء الدائري معلمة بالزاوية θ .

2 - اوجد قوة رد فعل السكة في نقطة M من الجزء الدائري للموجه.

3 - حدد الارتفاع الأصغر h للنقطة A لكي تكمل الكرية الحركة الدائرية على الموجه.